

## 固有値によるネットワークシステムの平衡特性解析

山本 将人<sup>1)</sup>・熊原 啓作<sup>2)</sup>

### Equilibrium Characteristic Analysis on Network Systems using Eigenvalue

Masato YAMAMOTO, Keisaku KUMAHARA

#### ABSTRACT

During recent decades, according to the extension of the social and economic activities, the systems utilized to support these human activities and other all kind of ones has been expanding. The network is an essential part of system to its expansion. The network structure is demanded to fit for display of system functions. In this paper a method to analyze the relationship between graph structure and equilibrium characteristic of networks are discussed. The equilibrium characteristic is one of the important factors for networks and depends on the graph structure of network. As a common model formula applicable to all kind of systems, we introduce a harmonic function type formula to explain the dynamic behavior of network, and analyze the equilibrium characteristic on networks of several graph structure. The graph structure is explained using the adjacency matrix. We show that the equilibrium characteristic depends on the eigenvalues of matrix formed of the adjacency matrix, the degree matrix introduced from the adjacency matrix and the coefficient of sensitivity. In addition, computer simulations of equilibrium behavior in cases of network disturbances and continuous fluctuations on sample networks of up to 500 nodes are carried to verify the results of the analytic studies. Using this relationship, it is possible to evaluate, improve and optimize the equilibrium characteristic of a network by controlling the graph structure.

#### 要 旨

近年、人間の社会、経済活動範囲の拡張に伴い、それらを支える人工システムを始めとして、あらゆる方面のシステムが飛躍的に拡大している。ネットワークはシステムの成長拡大を支えるのに不可欠な要素である。その構造はシステムの機能を安定的に発揮するのに適していることが重要である。本研究はネットワークの構造とその平衡特性の関係を解析的に知ることが目的としたものである。多方面のシステムに適用可能な動的挙動モデルとして調和関数型の漸化式モデルを設定し、各種ネットワーク構造の平衡特性を解析した。グラフ構造は隣接行列を用いて表される。その隣接行列と次数行列から導かれる行列の固有値とモデル式に用いる感度係数によって平衡特性が決まることを示した。理論的解析研究に加え、頂点数最大500規模の道、2次元格子、3次元格子およびハイパキューブなど代表的グラフ構造によるサンプルネットワークについて、各種行列の固有値計算と、突発外乱からの平衡動作およびゆらぎのシミュレーションを行い、理論解析により得られた結果とおおむね合致することを確認した。この関係を用いれば、ネットワークの平衡特性を評価し、その構造改変により特性改善や最適化をはかることが可能である。

#### I. 緒 言

1960年代より、先進諸国において高度成長期を迎えるとともに、各分野における技術進歩にともなって、交通、送配電および通信など社会の諸活動を支える基

盤システムが発展し始め、拡大成長した。さらに、最近における政治、経済のグローバル化と情報化によって、社会のさまざまなシステムは大規模化してきている。このようなシステムの拡大に欠くことのできないネットワークはシステム拡大を支えるものとして重要度を増してきている。1940年代に生じたシステム工学

<sup>1)</sup> 物質・システム科学研究所

<sup>2)</sup> 放送大学教授 (「自然と環境」コース)

の概念による各種の検討は進められてきているが<sup>3)</sup>、比重を増したネットワーク部分の構造構成方法とシステムの諸特性との関係についての研究は、まだ十分とはいえず、これを明らかにすることは必要なことである。

最近の大規模ネットワークの構造に関する研究によれば、ネットワークは種類によらずScale-freeと呼ばれる構造的特徴をもつとされる<sup>4,5)</sup>。これは次数（グラフの各頂点に接続する辺の数）に対する頂点の数が指数分布であるとするものである<sup>2)</sup>。代表的な人工システムである電力送電ネットワークにおいてもこの分布特徴がみられる[7, P. 876, 表1]。しかし、これらの構造は、ランダムに拡大成長した結果であり、システムの目的機能や特性を最適にする保証は得られていない。システムが大規模化するに従い破局的システム崩壊に見舞われやすいことは、米国における数度の大停電事故、グローバル化した通貨システムの混乱などが示している。

本論文は、ネットワークの大規模化に伴う脆弱化を防ぎ安定性を維持することを目的として、その構造と平衡特性の関係を数理的に解析することを試みたものである。とくにネットワークを扱う場合は離散システムとなり、その数理解析は困難を伴う。本解析では、その困難を解決するための一方法として、ネットワークのグラフ構造から得られる行列の固有値を用いる。

## II. 平衡動作の数式表現

一般にネットワークは、その各所が連携してシステムの機能を果たしている。システムが正常に機能を果たすためには、ネットワーク各所の状態が一定範囲内に保たなければならない。この状態を一定に保つ作用は、自然法則によるもの、またはそれを利用するもの、人工的に分散型自律制御を装備したもの、また、人々それぞれの知恵によるものなどがある。たとえば実在するネットワークで状態を表す量に、水圧、温度、電圧、商品価格、証券価格、通貨価格などがある。それらはネットワークの頂点ごとに状態があり、隣接頂点との間に状態値に差があると、辺を通じて流体、エネルギー、需要、通貨などが流れ、両頂点の状態を等しくするように作用する。これらの平衡メカニズムは、本来システムによって様々な方法と複雑さがあり、それぞれの理論モデルも発表されている。その大多数に共通していることは、接続する2つの頂点の状態量の差の大きさに応じた量で、差が縮小するように両頂点の状態量を修正する形のものである。この共通の形を単純化し離散形にして、次式を本研究に用いる数式モデルとする。

$$X_i^{(n+1)} = X_i^{(n)} + k \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij} (X_j^{(n)} - X_i^{(n)}) \quad (1)$$

( $i, j = 1, 2, \dots, M$ )

ここに、ネットワークを1個の連結グラフとし、 $X_i^{(n)}$ は頂点*i*における第*n*ステップにおける状態量、肩字(*n*)の*n*はステップ数、*k*は隣接頂点との状態量差を自頂点で修正するときの修正量比率であり感度係数(正数)と呼ぶ。 $M$ は頂点の総数、 $a_{ij}$ は、隣接行列の要素で、頂点*i*と頂点*j*が接続しているときは $a_{ij} = a_{ji} = 1$ 、接続していないときは $a_{ij} = a_{ji} = 0$ である。本研究においては、ネットワークに1個または複数の基準頂点を設け、その頂点は式(1)に従わず、常に基準値を保つものとする。

この平衡メカニズムを模擬した式には離散時間を用い、時間経過はステップの進行で表す。グラフ理論を用いる多くのネットワーク解析には離散時間が用いられている。グラフの頂点間を結ぶ辺は、両端頂点が1単位時間で作用を完了する長さ1としている。実際のネットワークでは、辺の長さには幅があり、それら辺で連携した実の2頂点間の作用実時間には差があるが、それらの辺は中継的頂点を設けるなどして、作用時間1の辺とすることを考える。実システムで離散時間を用いる例はデジタル制御がある。

本研究は、ネットワークの構造と平衡特性に関する研究であるため、純粋に隣接行列で表される構造要素のみを用いてモデルを作成すべきであるが、平衡特性を検証するモデル式には、構造要素以外の要素である感度係数を排除できない。必要上感度係数もモデル式に入れ、平衡特性を検討する際にはその大きさについてもあわせて検討する。

ここで、隣接行列*A*および次数行列*D*(対角行列)をつぎのように置く。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_M \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij} \quad (4)$$

式(1)の平衡動作モデル式を、頂点状態量ベクトル  $X^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_M^{(n)})^T$  および式(2)、(3)の行列を用いて表すとつぎのようになる。

$$X^{(n+1)} = [I + k(A - D)]X^{(n)} \quad (5)$$

## III. ネットワークの平衡特性の解析と評価

### 1. ネットワーク平衡力の内容

本研究は、つぎの2種類の不平衡現象における平衡

力特性をとりあげる。

第1に、ネットワークの状態は、突発的なシステム外部環境の変化や、需要と供給の大きな一時的不均衡といった内部要因によって不平衡擾乱が惹き起こされることがある。これら突発一時的な不平衡状態を契機にしてシステムが崩壊にまで発展することもしばしばある。このため、外部、内部の擾乱原因が除去された後には、短時間で平衡状態に復帰することが必要である。

第2に、比較的小さな外部環境や内部の需給ギャップなどは頻繁かつ継続して発生し、ネットワーク各部の状態量が継続的にゆらぐ原因となる。この状態量のゆらぎの値が大きいときや、大きさが増大するようときにはシステムが正常に機能できなくなるので、ゆらぎの大きさを一定以内に抑制し、成長を防止しなければならない。

以下に、ネットワークの構造とそれぞれの平衡特性を解析的に評価する。

## 2. 突発一時的な非平衡状態からの回復特性

ネットワークの状態が平衡状態から離脱すると、システム固有の平衡作用により平衡状態に戻ろうとする。ネットワークの平衡状態が毀れる原因は様々であるが、最もあり得ることは、外部要因によりネットワークの一部が停止したり、急激な負荷変動を課せられると状態が乱れる擾乱が発生することである。このときネットワークは平衡を回復する動作を行う。この動作ステップの進行による振る舞いをモデル式(5)を用いて記述する。非平衡時のステップ0から回復過程最初のステップ1、続いてステップ2とステップ $n$ までの状態の振る舞いは

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= [I+k(A-D)]X^{(0)} \quad (1\text{st step}), \\ X^{(2)} &= [I+k(A-D)]X^{(1)} \quad (2\text{nd step}), \\ X^{(3)} &= [I+k(A-D)]X^{(2)} \quad (3\text{rd step}), \\ &\dots\dots\dots \\ X^{(n)} &= [I+k(A-D)]X^{(n-1)} \quad (n\text{-th step}). \end{aligned}$$

ここに行列 $[I+k(A-D)]$ を $R$

$$R = I+k(A-D) \quad (6)$$

とおき、1ステップ前の式をつぎつぎ代入すると

$$X^{(n)} = [I+k(A-D)]^n X^{(0)} = R^n X^{(0)}. \quad (7)$$

行列 $R$ の固有値を絶対値が大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ 、それに対応する正規化された固有ベクトルを $x_1, x_2, \dots, x_M$ として式(7)を展開すると

$$X^{(n)} = c_1 \lambda_1^n x_1 + c_2 \lambda_2^n x_2 + \dots + c_M \lambda_M^n x_M = \sum_{i=1}^M c_i \lambda_i^n x_i. \quad (8)$$

ここに、 $c_i$ は初期状態量ベクトル $X^{(0)}$ の $x_i$ 軸成分である。

式(8)により、突発的非平衡状態から平衡動作ステ

ップの進行とともに状態がどのように変化するかを知ることができる。同式の第2辺第1項は絶対値最大固有値 $\lambda_1$ に関わる項である。 $\lambda_1^n$ は $n$ が増大すると、 $|\lambda_1| > 1$ のとき、この項はその大きさを増して状態量ベクトルが発散し、平衡状態に収束しない。 $|\lambda_1| = 1$ のとき、後の章で述べるように、かならず1個の(2個以上はない)値1の固有値により $\lambda_1 = 1$ とする。 $\lambda = 1$ 以外に $\lambda = -1$ があるばあいには(個数は1個に限らない)、それらを $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ とつづける。すなわち、 $|\lambda_1| = 1$ かつ $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = -1$ のとき、同式の第2辺第1項は $n$ が増大しても一定値で不変であるが、固有値が $-1$ の第2項などは、 $n$ が増大するとき $n$ が偶数か奇数かにより、絶対値は変わらないものの正負符号が交互に変わるので一定値に収束しない。 $\lambda_1 = 1$ かつ $|\lambda_2| < 1$ のばあいは、 $n$ が増大するとき $\lambda_1^n$ の項は常に1であり、 $\lambda_2$ 以降は固有値の絶対値が1より小さいので、 $n$ の増大によってそれぞれに対応する項は0になって第1項が残り、この値に収束して平衡状態を回復することになる。なお、後述のように行列 $R$ の絶対値最大固有値の絶対値が1より小さくなることはない。

以上により、平衡状態に収束するか発散するかは、絶対値最大固有値 $\lambda_1$ の大きさにより、つぎのようになる。

$ \lambda_1  > 1$	発散する
$\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = -1$	平衡しない(収束しない)
$\lambda_1 = 1$ and $ \lambda_2  < 1$	平衡する(収束する)
$ \lambda_1  < 1$	このケースはない

つぎに、平衡状態に復帰する場合においては、前記同様に式(8)の第2辺第2項 $\lambda_2$ の項により、平衡状態に復帰する速さが評価できる。絶対値第2最大固有値 $\lambda_2$ は、発散しない条件 $\lambda_1 = 1$ で $|\lambda_2| < 1$ である。このとき、 $n$ が増大すると $\lambda_2^n$ は0に向けて収束するが、それは $|\lambda_2|$ が小さいほど速く0に近づく。 $\lambda_3$ 以降の項については、それらの絶対値がさらに小さいのでより速く0になる。すなわち、つぎのことがいえる。 $|\lambda_2|$ が小さいほど速く平衡状態を回復する。

## 3. ゆらぎに対する平衡状態維持特性

ネットワークは内部、外部から、常時状態が動揺する小さな原因に曝されている。そのひとつに、ネットワークの各頂点に掛かる需要、負荷はそれを処理する機能によって解消するものであるが、両者の小さな時間差や量の差が負荷と処理の不均衡となり状態を揺るがすことになる。また、外部環境からのネットワークに対する環境条件の小さな変動を常時受けていることによるゆらぎもネットワークの平衡作用により平衡を維持できるものである。しかしその能力によっては、ゆらぎ量が累積して増大したり、成長が止まっても大きい値で継続することになり、システムが正常に機能することの障害となることがある。この短時間小不均衡が継続的に課せられたときのネットワークの状態推移を以下に述べる。

各頂点の初期状態ベクトルを  $X^{(0)}$  とし、 $w^{(s)}$  を第  $s$  ステップ目に加わる短時間小不均衡量ベクトルとする。第1ステップから第  $n$  ステップまでの各ステップの状態は

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= RX^{(0)} + w^{(1)}, \\ X^{(2)} &= RX^{(1)} + w^{(2)} = R^2 X^{(0)} + R w^{(1)} + w^{(2)}, \\ X^{(3)} &= RX^{(2)} + w^{(3)} = R^3 X^{(0)} + R^2 w^{(1)} + R w^{(2)} + w^{(3)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

と続き

$$X^{(n)} = RX^{(n-1)} + w^{(n)} = R^n X^{(0)} + \sum_{s=1}^n R^{n-s} w^{(s)} \quad (9)$$

を得る。式(9)の第3辺第1項は、式(7)の第3辺に示すもので、初期状態が平衡状態へ回復することを示す項である。第2項は、ステップごとに加わる短時間小不均衡量に関わる項である。

行列  $R$  の固有値を  $\lambda_i$ 、それに対応する正規化された固有ベクトルを  $x_i$  とし、式(8)を用いれば式(9)は

$$X^{(n)} = \sum_{i=1}^M c_i \lambda_i^n x_i + \sum_{i=1}^M \sum_{s=1}^n g_i^{(s)} \lambda_i^{n-s} x_i. \quad (10)$$

ここに、 $g_i^{(s)}$  は、ステップ  $s$  における  $w^{(s)}$  の  $x_i$  軸成分である。

式(10)の右辺第1項は式(8)の第3辺であり、突発擾乱からの平衡動作を表している。同右辺第2項は、ステップ開始後の各ステップで繰り返しゆらぎの原因量に加わることによる項である。

ゆらぎ状態量の大きさを評価するためにつぎの量を定義する。まず、全頂点が平衡状態にあるときの状態量ベクトルを  $X_{\text{eq}}$  とする。ただし、基準頂点を設ける場合は全ての頂点が基準値  $X_i = X_{\text{ref}}$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ) にあることが平衡状態であるので、 $X_{\text{ref}}$  と表記する。すなわち  $X_{\text{eq}} \equiv X_{\text{ref}} \equiv X_{\text{ref}}(1, 1, \dots, 1)^T$  である。つぎにステップ  $n$  時の各頂点の状態量の基準値からの乖離量ベクトルを  $Y^{(n)}$  とする。

$$Y^{(n)} = X^{(n)} - X_{\text{ref}} \quad (11)$$

第  $n$  ステップにおける各頂点の乖離量を2乗し、全頂点についての総和を頂点数で割ったものを分散値  $Var^{(n)}$  とする。

$$Var^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^M (X_i^{(n)} - X_{\text{ref}})^2}{M} \quad (12)$$

式(12)を式(11)を使って表すとつぎの式になる。

$$Var^{(n)} = \frac{\|Y^{(n)}\|^2}{M} \quad (13)$$

式(13)の  $Var^{(n)}$  について、ステップ  $n$  の進行による  $Y^{(n)}$  の大きさと動向（分散値が増大するか、一定値範囲内に維持されるか）を知り評価する。 $Y^{(n)}$  は、式(11)および式(10)により

$$X^{(n)} = \sum_{i=1}^M c_i \lambda_i^n x_i + \sum_{i=1}^M \sum_{s=1}^n g_i^{(s)} \lambda_i^{n-s} x_i - X_{\text{ref}}. \quad (14)$$

式(14)右辺第3項の  $X_{\text{ref}}$  は定数であり、 $n$  の進行によって変化しない。第1項は初期状態からの平衡動作によるもので、初期状態のみに影響される。この項による動向はすでに述べたように、 $\lambda_1=1$  かつ  $|\lambda_2|<1$  のときにのみ収束して平衡し、他のケースでは発散して平衡しない。ここでの検討は  $\lambda_1=1$  かつ  $|\lambda_2|<1$  で、第2項の値がステップ  $n$  の進行によって減少し消滅する場合について評価を進める。

式(14)右辺第2項の絶対値最大固有値  $\lambda_1$  の項は

$$\sum_{s=1}^n g_i^{(s)} \lambda_i^{n-s} x_i \quad (15)$$

であり、この項について検討する。行列  $R$  の固有値が  $\lambda=1$  のとき、その固有値に属する固有ベクトル  $x$  は  $x = \frac{1}{\sqrt{M}}(1, 1, \dots, 1)^T$  で、これ以外の固有ベクトルはない（このことは次章の式(21)以降において証明する）。すなわち  $\lambda_1=1$  のとき、これに対応する固有ベクトルは  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{M}}(1, 1, \dots, 1)^T$  である。また、ゆらぎの原因となる局地的な短時間小不均衡は、ランダムであり、頂点ごとに独立現象であるので、同時に発生した全頂点の  $w^{(s)}$  の各頂点成分の和  $\sum_{i=1}^M w_i^{(s)}$  はほぼ0とみなす。したがって

$$\begin{aligned} g_1^{(s)} &= (w_1^{(s)}, w_2^{(s)}, \dots, w_M^{(s)}) \frac{1}{\sqrt{M}}(1, 1, \dots, 1)^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M w_i^{(s)} \doteq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

となり、すべてのステップにおいて  $g_1^{(s)} \doteq 0$  となるから  $\lambda_1$  の項は考慮する必要がない。

つぎに、 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_M$  のそれぞれの項について  $\lambda_i$  ( $i=2, 3, \dots, M$ ) としてつぎのような検討を加える。式(14)の第2項のうち  $\lambda_i$  の項は

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n g_i^{(s)} \lambda_i^{n-s} &= g_i^{(n)} + g_i^{(n-1)} \lambda_i + g_i^{(n-2)} \lambda_i^2 + \dots + g_i^{(s)} \lambda_i^{n-s} \\ &+ \dots + g_i^{(1)} \lambda_i^{n-1} < \rho_i \sum_{s=1}^n |\lambda_i|^{n-s} = \rho_i \frac{1 - |\lambda_i|^n}{1 - |\lambda_i|} \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $\rho_i = \sup\{|g_i^{(s)}| \mid s=1, 2, \dots\}$  である。 $w^{(s)}$  のノルムを有限と考えれば  $\rho_i$  も有限で一定である。式(17)の第4辺を考察する。 $|\lambda_i|<1$  であるから  $n$  が大きくなるにしたがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_i \frac{1 - |\lambda_i|^n}{1 - |\lambda_i|} = \rho_i \frac{1}{1 - |\lambda_i|} \quad (18)$$

となり、有限値に収束する。収束するまでのこの辺の値の変化を見ると、 $|\lambda_i|<1$  であることにより、 $n$  が増大するにしたがって増加しながら次第に飽和する。 $|\lambda_i|$  の値が小さいほどはやく飽和し、その飽和値は小さい。

以上により、分散量 $Var^{(n)}$ は $Y^{(n)}$ のノルムに関する固有ベクトルに掛かる係数の上界を示す式(18)の値により大きさが決まる。絶対値第2最大以降の固有値 $\lambda_i (i=2, 3, \dots, M)$ のうち $\lambda_2$ が絶対値最大であるから、分散量の飽和の速さや大きさは $\lambda_2$ が支配的である。したがって、ネットワークの状態ゆらぎが増大せず、全体のゆらぎを小さく抑えることができるかどうかは、 $\lambda_2$ の大きさによるものであり、小さい方が平衡性能が良好である。

#### 4. 平衡特性と固有値

平衡特性と固有値について、本章に述べたことを要約すれば次のようになる。

- (1) ネットワークに生じた一時的な擾乱から平衡状態に復帰するためには、行列 $R$ の絶対値最大固有値 $\lambda_1$ が1でなければならない。 $\lambda_1$ が1より大きいと、平衡状態に復帰せず発散する。
- (2) 擾乱から平衡状態に復帰する時間は、行列 $R$ の絶対値第2最大固有値 $\lambda_2$ の絶対値が小さい方が速い。
- (3) ネットワークに生じる繰り返しゆらぎが大きく増大せず、一定値以内に抑制されている状態を維持するためには、上記(1)、(2)と同様に行列 $R$ の固有値 $\lambda_1$ が1で、 $|\lambda_2|$ が小さい方がよい。

平衡特性からみた感度係数のとりうる範囲は行列 $(A-D)$ との関係で決まることから、ネットワークの平衡特性を決めるのは、そのグラフ構造である。

### IV. グラフ構造と平衡特性を決める固有値の様相

#### 1. 隣接行列の固有値の性質

グラフの構造を直接的に表現するのは隣接行列 $A$ である。その隣接行列の固有値にはつぎのような性質がある。

- (1) 隣接行列 $A$ の最大固有値と次数の関係  
グラフ理論によれば、グラフ $G$ の各頂点それぞれに繋がる辺の数(次数という)の平均を $d(G)$ 、最大次数を $\Delta(G)$ とすると、隣接行列 $A$ の最大固有値 $\eta_{\max}$ は

$$d(G) \leq \eta_{\max} \leq \Delta(G) \quad (19)$$

である[6, P. 100]。すなわち、隣接行列 $A$ の最大固有値はグラフの平均次数より大きく、最大次数より小さい。

- (2) 隣接行列 $A$ の固有値はすべて実数でその和は0であること

隣接行列 $A$ は実対称行列である。したがってその固有値はすべて実数である。また行列 $A$ の対角要素がすべて0であるから固有値の総和は0である[6, P. 82]。

上記(1)により、グラフの平均次数、最大次数が大きくなるほど最大固有値は大きくなり、同(2)により、最大固有値(正)から最小固有値(負)までの幅が広がる。

#### 2. 行列 $(A-D)$ の固有値の性質

式(4)により、 $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij}$ であるから、行列式 $[A-D]$ の行ごとに全列要素の和を求めれば

$$\sum_{j=1}^M a_{ij} - d_i = 0, \quad (i=1, 2, \dots, M). \quad (20)$$

ここに、 $a_{ii}=0$ である。

いま、この行列式の第2列から第 $M$ 列のすべての要素を行ごとに第1列の要素に加えると、式(20)により第1列の全行の要素はすべて0になる。行列式のある1つの列の要素すべてが0であるとき、その行列式の値は0であり、第1列要素に総和を置くまえの行列式の値も同値であるからこの行列式の値は0である。 $\det(A-D)=0$ のとき行列 $(A-D)$ の固有値には、つぎの(1)、(2)に述べる性質がある<sup>4)</sup>。

- (1) 行列 $(A-D)$ の固有値は、0または負である。
- (2) 行列 $(A-D)$ の固有値には、0のものが1個ある。

なお、上記性質(2)の固有値 $\mu=0$ について、それに属する固有ベクトルをつぎにより求める。固有値 $\mu$ と固有ベクトル $x$ の関係から

$$(A-D)x = \mu x. \quad (21)$$

この両辺と $x$ との内積からつぎの関係が得られる。

$$\langle (A-D)x, x \rangle = \langle \mu x, x \rangle = \mu \langle x, x \rangle = \mu \|x\|^2 \quad (22)$$

式(22)左辺をベクトル要素を用いて展開し、これに同式右辺において $\mu=0$ とすれば

$$\begin{aligned} \langle (A-D)x, x \rangle &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} (x_j - x_i) x_i \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} (x_j - x_i)^2 \right] = \mu \|x\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

上式第3辺の $a_{ij}(x_j - x_i)^2$ はすべて非負であるから、その和が0になるためにはそれぞれの項が0、すなわち $x_j = x_i$ でなければならない。したがって、固有ベクトルの要素は $x_1 = x_2 = \dots = x_M$ である。これにより固有ベクトルは

$$x = \alpha(1, 1, \dots, 1)^T \quad (24)$$

である。ここに $\alpha$ は係数で、正規化する場合は $\alpha = \frac{1}{\sqrt{M}}$ である。

#### 3. 行列 $R$ の固有値の様相

$R = I + k(A-D)$ であるので、行列 $(A-D)$ の固有値 $\mu$ と行列 $R$ の固有値 $\lambda$ の関係は

$$\lambda = 1 + k\mu. \quad (25)$$

ここに、 $k \geq 0$ である。前節で証明したように $\mu \leq 0$ であるので、 $\lambda \leq 1$ である。 $\mu=0$ のとき、 $k$ の値にかかわらず $\lambda=1$ である。

図1に隣接行列 $A$ 、行列 $(A-D)$ および行列 $R$ それぞれの固有値の値域、それらの関係を図示した。

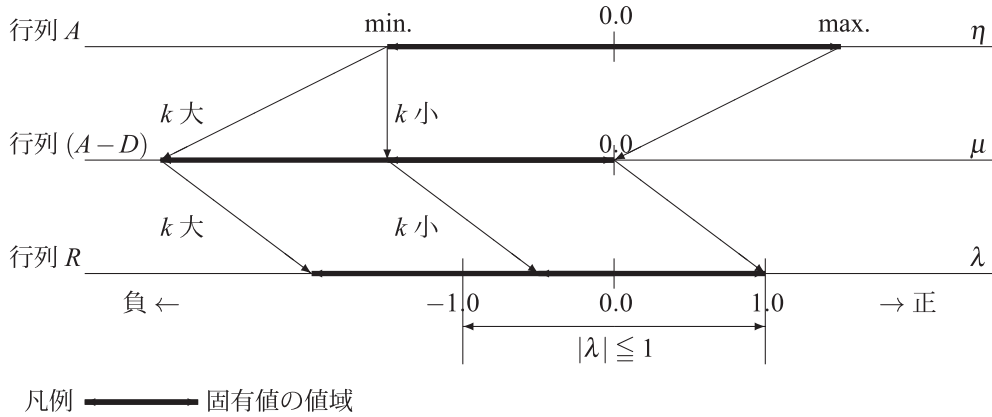


図1 固有値η, μ, λの値域と相互の関係

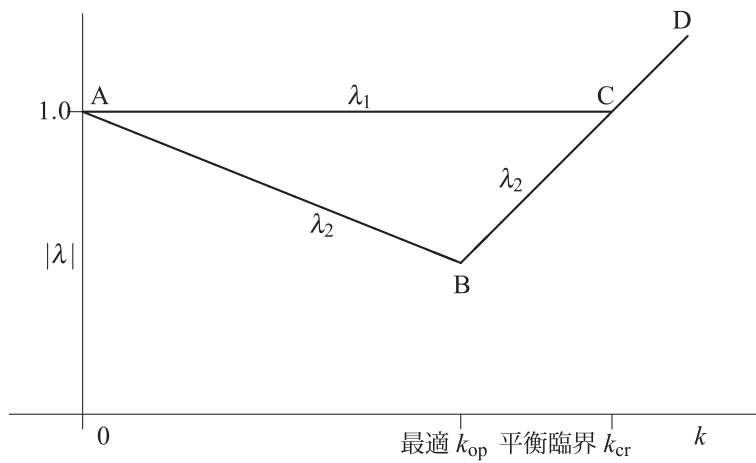


図2 感度係数の大きさと固有値λ<sub>1</sub>; λ<sub>2</sub>の決定概念

行列Rの固有値の正側最大は常に1である。負側は、行列(A-D)の負側固有値と感度係数kにより、-1より負側になる場合と-1より正側になる場合がある。その結果絶対値最大固有値が|λ<sub>1</sub>|>1となる場合とλ<sub>1</sub>=1になる場合がある。

4. 感度係数と行列Rの固有値との関係

μ ≤ 0の最大固有値は0である。最小固有値（絶対値では最大）をμ<sub>min</sub>とする。行列Rの固有値の絶対値が大きい方から順にλ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>, ..., λ<sub>n</sub>とすると

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1 & |1+k\mu_{\min}| \leq 1 \\ & (\because k\mu_{\min} \geq -2) \text{ のとき} \\ |1+k\mu_{\min}| = -1-k\mu_{\min} & |1+k\mu_{\min}| > 1 \\ & (\because k\mu_{\min} < -2) \text{ のとき} \end{cases} \quad (26)$$

である。

式(26)の関係を図2に示した。λ<sub>1</sub>の大きさを縦軸にし、それが横軸の感度係数kの大きさによって変わることがわかる。

λ<sub>1</sub>は、式(26)右辺の上の場合では1で、図2の点Aと点Cを結ぶ直線で描かれる。下の場合では、λ<sub>1</sub> = -1

-kμ<sub>min</sub>であり、同図の点Cから点Dに向かう直線で描かれる。両caseのλ<sub>1</sub>が等しくなるのは点Cであり、このときの感度係数をk<sub>cr</sub>とすれば-1-k<sub>cr</sub>μ<sub>min</sub>=1より

$$k_{cr} = -\frac{2}{\mu_{\min}} \quad (27)$$

である。感度係数kが0 ≤ k ≤ k<sub>cr</sub>の範囲ではλ<sub>1</sub> = 1で、k<sub>cr</sub> < kではλ<sub>1</sub> > 1となる。

Ⅲ章1.で論じたように、λ<sub>1</sub> > 1でネットワークは発散し、λ<sub>1</sub> = 1で平衡状態に回復するので、k<sub>cr</sub>は平衡を回復する最大感度係数である。このことからk<sub>cr</sub>を平衡臨界係数と呼ぶこととする。

つぎに、μの正負を考慮した最大固有値は0であるが、μのなかでこの0のものを除いてつぎに大きい固有値をμ<sub>max2</sub>とする。絶対値第2最大固有値λ<sub>2</sub>は、正側第2最大固有値1+kμ<sub>max2</sub>と負側絶対値最大固有値|1+kμ<sub>min</sub>|の大きい方である。λ<sub>1</sub> = 1の条件下では、前述によりk < -2/μ<sub>min</sub>である。この条件で0 ≤ k ≤ -1/μ<sub>min</sub>の範囲では、1+kμ<sub>max2</sub> = 1+kμ<sub>min</sub> = 0、(∵ μ<sub>max2</sub> > μ<sub>min</sub>, k = 0), 故にλ<sub>2</sub> = 1+kμ<sub>max2</sub>である。k > -1/μ<sub>min</sub>では1+kμ<sub>min</sub> < 0である。-1/μ<sub>min</sub> < k < -2/μ<sub>min</sub>において1+kμ<sub>max2</sub> = |1+kμ<sub>min</sub>|となる点は1+kμ<sub>max2</sub> = -1-kμ<sub>min</sub>とおい

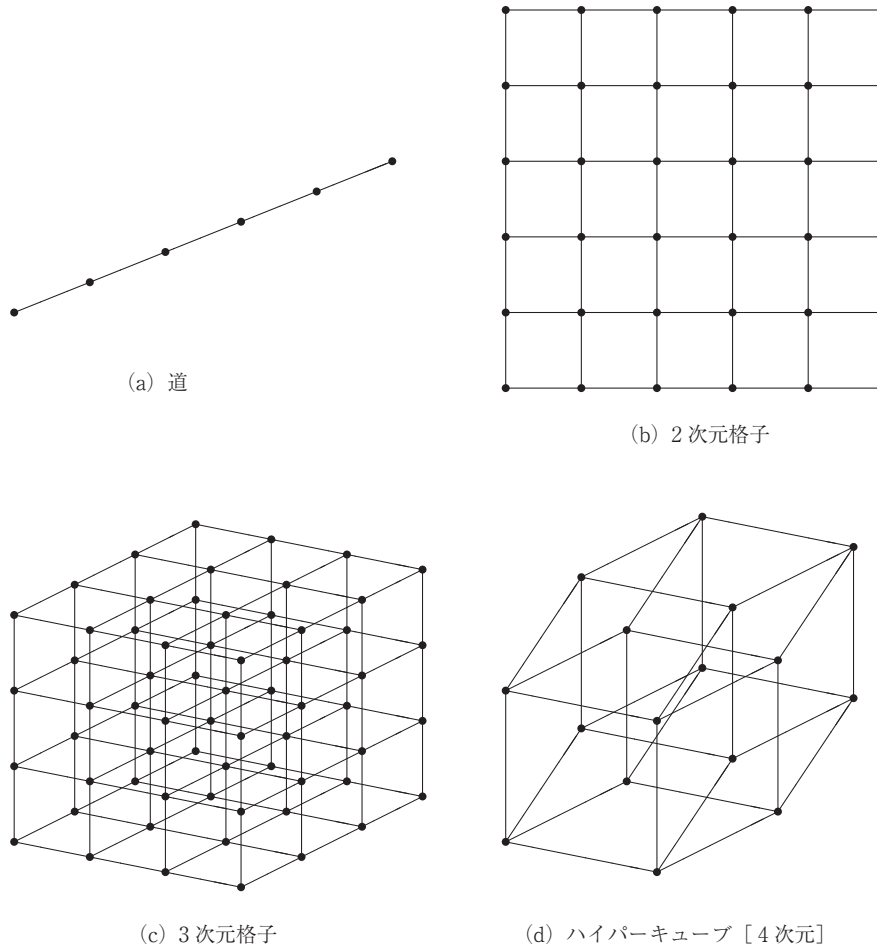


図3 供試グラフの構造図

て $k$ を求めたものである。これを $k_{op}$ とすると

$$k_{op} = -\frac{2}{\mu_{max2} + \mu_{min}}. \quad (28)$$

$k_{op}$ を中心にしてその両側の $k$ における $\lambda_2$ はつぎのようになり、それを図2に示す。同図点Bは $k = k_{op}$ のときを示す。

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1 + k\mu_{max2} & k < k_{op} \text{のとき} \\ \frac{\mu_{min} - \mu_{max2}}{\mu_{min} + \mu_{max2}} = \frac{1 - \frac{\mu_{max2}}{\mu_{min}}}{1 + \frac{\mu_{max2}}{\mu_{min}}} & k = k_{op} \text{のとき} \\ -1 - k\mu_{min} & k > k_{op} \text{のとき} \end{cases} \quad (29)$$

であるから図2が示すように、 $k = k_{op}$ としたときの $\lambda_2$ は最小値となる。 $\lambda_2$ が小さいほど平衡特性はよいので、最良の感度係数となることから $k_{op}$ を最適感度係数と呼ぶこととする。

## V. 各種グラフ構造の固有値と平衡特性

### 1. 供試するグラフ構造と検討事項

Ⅲ章およびⅣ章においてグラフ構造から決まる固有値と平衡特性について述べたことを、構造の特徴の異

なる実規模グラフ構造のいくつかについて検証する。

#### (1) グラフ構造

検討に供するグラフ構造は以下のものである。それぞれは規則的で対称形であるが、各頂点の主とする次数の特徴が構造間で異なるものを選んだ。それぞれの構造図を図3に示す。

##### 道グラフ

両端頂点の次数は1であるが、大部分である中間位置頂点の次数は2である。

##### 2次元格子グラフ

最外周正方形の4頂点の次数は2、周辺部の両端以外の頂点の次数は3、大部分である内部頂点の次数は4である。縦と横の頂点は同数とする。

##### 3次元格子グラフ

最外周立方体の8頂点の次数は3、それ以外の稜および表面に位置する頂点次数は4、外側6面内部の頂点次数は5、大部分である内部頂点の次数は6である。縦と横、高さの頂点は同数とする。

##### ハイパキューブグラフ

全頂点の次数が同じでその大きさは全頂点数により変わる。

#### (2) 頂点数

1つの構造の頂点数は、64個から500個級とする。

表1 供試グラフの頂点次数、最大、最小固有値

グラフ構造	頂点数	頂点次数		固有値			
		最大	平均	最大	最小	絶対値最小	総和
道	64	2	1.96875	1.997664	-1.997664	0.048327	0
	100	2	1.98	1.999033	-1.999033	0.031104	0
	256	2	1.99219	1.999851	-1.999851	0.012224	0
	512	2	1.99609	1.999962	-1.999962	0.006124	0
2次元格子	64	4	3.5	3.758770	-3.758770	0.0	0
	100	4	3.6	3.837972	-3.837972	0.0	0
	256	4	3.75	3.931892	-3.931892	0.0	0
	400	4	3.8	3.955323	-3.955323	0.0	0
	506	4	3.8221	3.964262	-3.964262	0.001518	0
3次元格子	64	6	4.5	4.854102	-4.854102	0.381966	0
	125	6	4.8	5.196152	-5.196152	0.0	0
	343	6	5.14286	5.543277	-5.543277	0.0	0
	512	6	5.25	5.638156	-5.638156	0.0	0
ハイパキューブ	64	6	6.0	6.0	-6.0	0.0	0
	128	7	7.0	7.0	-7.0	1.0	0
	256	8	8.0	8.0	-8.0	0.0	0
	512	9	9.0	9.0	-9.0	0.0	0

表2 行列(A-D)の固有値、平衡臨界および最適感度係数

グラフ構造	頂点数	行列(A-D)固有値			感度係数		$\lambda_2$ $k = k_{op}$
		$\mu_{max2}$	$\mu_{min}$	$\mu_{max2}/\mu_{min}$	$k_{cr}$	$k_{op}$	
道	64	-0.0024	-3.9975	0.000604	0.5003	0.5	0.9987
	100	-0.00098	-3.9990	0.000245	0.5001	0.5	0.9995
	256	-0.00015	-3.9993	0.000038	0.5000	0.5	0.99992
	512	-0.00003	-3.99996	0.000008	0.5000	0.5	0.99998
2次元格子	64	-0.1522	-7.6955	0.01978	0.2598	0.2548	0.9612
	100	-0.0978	-7.8042	0.01253	0.2562	0.2530	0.9752
	256	-0.0384	-7.9231	0.00485	0.2524	0.2512	0.9903
	400	-0.0246	-7.9507	0.00309	0.2515	0.2507	0.9938
	506	-0.0186	-7.9610	0.00234	0.2512	0.2506	0.9953
3次元格子	64	-0.5857	-10.2426	0.05718	0.1952	0.1846	0.8918
	125	-0.3819	-10.8541	0.03515	0.1842	0.1779	0.9320
	216	-0.2679	-11.1961	0.02393	0.1786	0.1744	0.9532
	343	-0.1980	-11.4058	0.01736	0.1753	0.1723	0.9658
	512	-0.1522	-11.5432	0.01319	0.1732	0.1710	0.9739
ハイパキューブ	64	-2.0	-12.0	0.16667	0.1666	0.1428	0.7142
	128	-2.0	-14.0	0.14286	0.1428	0.1250	0.75
	256	-2.0	-16.0	0.125	0.125	0.1111	0.7777
	512	-2.0	-18.0	0.1111	0.1111	0.1	0.8

## (3) 検討事項

各構造、頂点数のグラフについて、行列(A-D)の固有値計算、平衡臨界および最適感度係数ならびに平衡特性を示す $\lambda_2$ を計算する。

固有値計算は、コンピュータにより2段QR法を用いる。

## 2. 検討結果

供試する構造と頂点数のグラフの特徴を示すデータであるそれぞれの最大、平均次数、隣接行列の固有値を表1に示す。これらのデータは構造と頂点数によるもので、直接ネットワークの平衡特性を論ずることはできないが、平衡特性を決めるベースとなる。構造により平均次数が異なり、それにより隣接行列の最大固有値が異なることが分かる。ハイパキューブを除くグ



表3 感度係数と固有値

グラフ構造	$k$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	comment
道 512	0.501	-1.003981	-1.003925	
	0.5	1.0	0.999981	critical, optimum
	0.49	1.0	0.999982	
	0.4	1.0	0.999985	
	0.3	1.0	0.999989	
2次元格子 506	0.252	-1.006176	1.0	
	0.2512	1.0	-0.999807	critical
	0.2506	1.0	0.995332	optimum
	0.25	1.0	0.995343	
	0.23	1.0	0.995716	
3次元格子 512	0.20	1.0	0.996274	
	0.1733	-1.000450	1.0	
	0.1732	1.0	-0.999296	critical
	0.173	1.0	-0.996987	
	0.1710	1.0	0.973967	optimum
ハイパキューブ 512	0.15	1.0	0.977164	
	0.104	1.0	0.984167	
	0.1112	-1.001600	1.0	
	0.1111	1.0	-0.999800	critical
	0.11	1.0	-0.989999	
	0.105	1.0	-0.890000	
	0.1	1.0	0.800000	optimum
	0.089	1.0	0.822000	
0.067	1.0	0.866000		
0.044	1.0	0.912999		
0.022	1.0	0.956000		

ラフでは、構造が同じでも頂点数が大きくなると、平均次数と最大固有値が僅かに大きくなる。ハイパキューブでは、頂点数とともに平均次数、最大固有値とも大きくなる。表2にそれぞれのグラフ構造について、頂点数を変え、行列 $(A-D)$ の絶対値第2最大固有値 $\mu_{\max 2}$ 、最小固有値 $\mu_{\min}$ 、それらの比 $\mu_{\max 2}/\mu_{\min}$ 、平衡臨界感度係数 $k_{\text{cr}}$ 、最適感度係数 $k_{\text{op}}$ および行列 $R$ の $k = k_{\text{op}}$ における絶対値第2最大固有値 $\lambda_2$ を示す。

これらのデータは、それぞれのグラフ構造、頂点数のネットワークの平衡特性を示している。とくに同表最右欄の $\lambda_2$ は、感度係数を最適にしたときの平衡特性を示すもので、小さい方が特性がよい。 $k = k_{\text{op}}$ のときの $\lambda_2$ を与えるデータは式(29)右辺中段の式より、 $\frac{\mu_{\max 2}}{\mu_{\min}} > 0$ であり、この値が大きい方が $\lambda_2$ が小さくなる。表2のデータからみると、 $\frac{\mu_{\max 2}}{\mu_{\min}}$ は道、2次元格子、3次元格子、ハイパキューブグラフの順に大きくなり、 $\lambda_2$ は同じ順に小さくなる。すなわち平衡特性は同じ順でよくなることを示している。とくにハイパキューブは優れた平衡特性を有している。

### 3. 感度係数と固有値の関係計算例

頂点数500個級の各供試グラフ構造について、感度係数 $k$ を変え、絶対値最大固有値 $\lambda_1$ および絶対値第2

最大固有値 $\lambda_2$ を計算した結果を表3に示す。感度係数 $k$ は、平衡臨界感度係数よりわずかに大きい値から、表2に示した計算による $k_{\text{cr}}$ および $k_{\text{op}}$ さらに適当な間隔で小さい方に範囲を広げた。 $\lambda_2$ は、すべてのグラフ構造について表2の値とよく一致している。この表に示した計算結果も、表2の結果と同様に、道、2次元格子、3次元格子、ハイパキューブの順に、 $\lambda_2$ が小さくなり平衡特性がよくなることを示している。また、この順に $k_{\text{cr}}$ と $k_{\text{op}}$ の間隔が大きくなり、それによっても $\lambda_2$ が小さくなっている。とくに良好な平衡特性を示すハイパキューブについて図4に図示した。図2に示した $\lambda_2$ の模式線の形とよく一致している。

## VI. 平衡シミュレーション

V章までの理論検討結果を検証するため、コンピュータ上で平衡動作を1ステップずつ各頂点の状態変化を計算することを継続的におこなう平衡動作シミュレーションを実行した。道、2次元格子、3次元格子およびハイパキューブ各グラフ構造について、それぞれの頂点数500個級について以下に述べる。

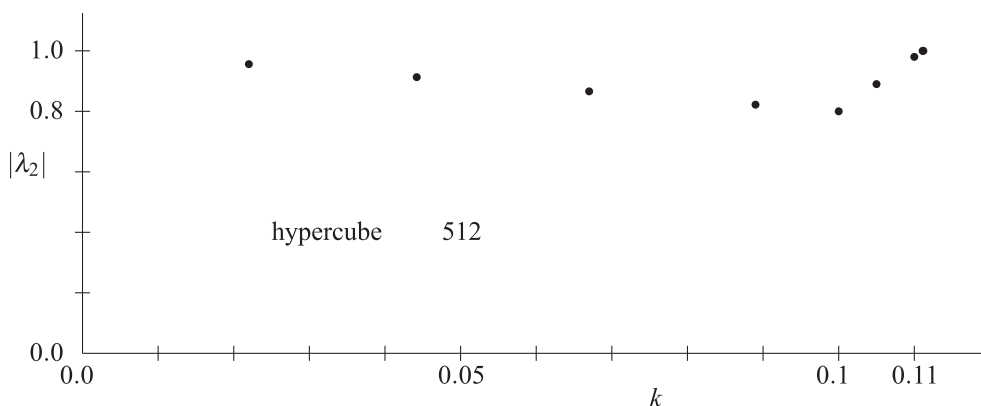


図4 感度係数と絶対値第2最大固有値

表4 突発非平衡状態からの平衡復帰ステップ数

構造	頂点数	感度係数	平衡ステップ数	comment
道	512	0.5	676282	critical- <i>k</i>
		0.49	51099	min. survey datum
		0.25	71116	
2次元格子	506	0.2512	72962	critical- <i>k</i>
		0.2506	7144	min. survey datum, optimum- <i>k</i>
		0.2	8504	
3次元格子	512	0.1732	19312	critical- <i>k</i>
		0.171	4125	min. survey datum, optimum- <i>k</i>
		0.104	11150	
ハイパキューブ	512	0.1111	3230	critical- <i>k</i>
		0.11	1638	min. survey datum
		0.1	1780	optimum- <i>k</i>
		0.044	6219	

1. シミュレーションの種類

(1) 突発非平衡状態からの平衡状態復帰

頂点の番号順に $0.0 \leq w \leq 2.0$ の乱数を割り当て各頂点の初期値とする。ただし相互に最も離れた2頂点には1.0を割り当て基準頂点として固定する。各頂点の状態を式(1)により計算し、ステップを進行させる。全頂点状態量の前ステップとの差が $10^{-7}$ 以下となったとき平衡状態復帰とみなし、それまでのステップ数を計測する。

(2) ゆらぎ継続

全頂点が平衡状態( $x_i = 1.0, i = 1, 2, \dots, M$ )から始めて、毎ステップ各頂点全部に比較的小さい乱数 $-0.15 \leq w \leq 0.15$ を加えることを頂点数の100倍回繰り返す。ただし相互に最も離れた2頂点は1.0で固定し基準頂点とする。このとき最後の100ステップの分散(式(12)参照)の平均値と最初から最後まででの分散を最小2乗法による直線近似したときの直線の傾きを計測する。

2. シミュレーションの結果

(1) 突発非平衡状態からの平衡状態復帰

平衡復帰ステップ数を表4に示す。

この表が示すように全構造グラフにおいて、感度係数が平衡臨界感度係数のときに平衡には復帰するものの復帰までのステップ数が非常に大きい。これは $\lambda = 1$ と $\lambda = -1$ が拮抗併存しているため、 $\lambda = -1$ の項が容易に減衰しないことによるものである。2次元および3次元格子グラフでは、実測最小ステップ感度係数と計算によって得た最適感度係数とがよく一致している。ハイパキューブグラフでは実測最小ステップ感度係数と計算によって得た最適感度係数に多少のずれがある。全体としては感度係数と平衡特性の関係が理論によって得たものとよく一致していることが分かる。

(2) ゆらぎ継続

最後100回の平均分散値および近似直線の傾きを表5に示す。表5のデータによれば、道グラフは平均分散値が他のグラフよりも大きく、その傾きが、無視できないほど大きいので、ゆらぎを繰り返しているうちに分散値が成長し、頂点状態が平衡から次第に離れていくことを示している。平均分散値および傾きともに、2次元格子、3次元格子、ハイパキューブと小さくなり、ゆらぎが繰り返し発生していても、頂点状態は一定の分散値にとどまり、平衡状態の近くで維持されることが分かる。このシミュレーションによっても

表5 ゆらぎの平均分散値とその増大傾き

構造	頂点数	感度係数	平均分散	傾き ( $10^{-4}/\text{step}$ )	comment
道	512	0.5	3.812214	0.6625	critical- $k$
		0.4	3.784467	0.8195	
		0.2	5.530834	1.1581	
2次元格子	506	0.2512	0.035192	0.0001	critical- $k$
		0.2506	0.024579	0.0005	optimum- $k$
		0.2	0.028334	0.0009	
3次元格子	512	0.1732	0.014919	0.0008	critical- $k$
		0.171	0.013102	0.0000	optimum- $k$
		0.104	0.019405	0.0003	
ハイパキューブ	512	0.1111	0.009210	-0.0001	critical- $k$
		0.105	0.008838	0.0000	
		0.1	0.008838	0.0000	optimum- $k$
		0.044	0.030310	0.0003	

ハイパキューブグラフがすぐれた平衡性能を有することが確かめられた。

## VII. 結 言

本論文に述べた研究により、ネットワークシステムの平衡特性を解析的に知るには、グラフ構造を示す行列の固有値を用いるのが有効であることが分かった。その概要はつぎのとおりである。

- (1) ネットワークシステムの平衡特性は、グラフ構造を示す隣接行列とおよび隣接行列によって決まる次数行列ならびにシステムの平衡動作感度係数によってつくられる行列の固有値の大小で知ることができる。この方法は、いかなるグラフ構造においても隣接行列が得られれば適用できる。ただし、感度係数は隣接点との状態変数値の差に対する修正量の割合を表す。
- (2) 感度係数が可変の場合、それを調整することにより平衡特性を最適にすることが多くの場合可能である。
- (3) 最適感度係数を適用したネットワークは、そのグラフ構造における最良の平衡特性を示す。そのときの特性はもっぱらそのグラフ構造に依存するので、さらに特性を改善するためにはグラフ構造の変更を必要とする。
- (4) 本研究において、グラフ構造と平衡特性の関係を検証するためにサンプルとして供試した道、2次元格子、3次元格子およびハイパキューブの各グラフ構造においては、記載順の後になるほど良好な平衡特性を示した。特にハイパキューブグラフは顕著に優れた平衡特性を有する。しかしながら頂点数が大きくなるに従い、他のグラフ構造と同

じように平衡特性が低下する傾向を示した。

上記研究結果等から今後は以下に記す課題に取り組みたい。

- (1) どのグラフ構造においても頂点数が大きくなると平衡特性が低下する。本研究での500個級以上に頂点数が大きい場合に平衡特性を低下させないグラフ構造を見いだすことが必要である。
- (2) 本研究のアプローチとは逆のアプローチである、所定の固有値を得るためにグラフ構成をいかにすればよいかについて、数理手法を見いだすことができれば、それは有用である。

本論文がネットワークの構造という離散的問題を数理的扱う手法として有効であり、さらに発展し幅広く有用で、簡便な方法が確立されることに一助となれば幸いである。

## 参考文献

- 1) アルバート＝ラズロ・バラバシ、青木薫訳、新ネットワーク思考、日本放送出版協会、東京、2004。
- 2) 林 幸雄、Scale-freeネットワークの生成メカニズム、応用数理、Vol. 14、No. 4、Dec. 2004、58-74。
- 3) 岸田純之助、技術—その周辺、日本経営出版会、東京、1969。
- 4) 児玉慎三、須田信英、システム制御のためのマトリクス理論、コロナ社、東京、2002。
- 5) M. E. J. Newman, The Structure and Function of Complex Networks, SIAM Review, 45(2003), 167-256.
- 6) 竹中淑子、線形代数的グラフ理論、培風館、東京、1989。
- 7) 山本将人、LU分解における並列消去法、電気学会論文誌B、114-B(1994)、873-880。

(2009年10月7日受理)